Logaritmos

Aprendizajes esperados

- Reconocer la definición de logaritmo.
- Calcular logaritmos por medio de la definición.
- Reconocer las propiedades de logaritmos.
- Aplicar propiedades de logaritmos en la resolución de ejercicios.

Contenidos

Definición

Logaritmo de base 10

Logaritmo de la base

Logaritmo de la raíz

Logaritmos

Logaritmo de la potencia

Logaritmo de la división

Logaritmo de la multiplicación

1. Definición de logaritmo

Un logaritmo es de la forma:

$\boxed{\log_a(b) = n \quad \Leftrightarrow \quad a^n = b}$, con $b > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$

donde " **n** es el logaritmo de **b** en base **a**"

Un logaritmo nos permite responder: ¿Cuál es el exponente ***n*** al cual debemos elevar una base ***a*** para obtener un resultado ***b***?

2. Cálculo de logaritmos

Para determinar el valor de un logaritmo, es recomendable escribir la igualdad asociada a la potencia correspondiente.

$$\log_a(b) = n \quad \Leftrightarrow \quad a^n = b$$

Ejemplos:

1) $\log_2(8) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Por lo tanto, $\log_2(8) = 3$

2) $\log_3(9) = x \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Por lo tanto, $\log_3(9) = 2$

2. Cálculo de logaritmos

3) $\log_4 (64) = x \Leftrightarrow 4^x = 64 \Rightarrow x = 3$

Por lo tanto, $\log_4 (64) = 3$

4) $\log_{10} (0,1) = x \Leftrightarrow 10^x = 0,1 \Rightarrow x = -1$

Por lo tanto, $\log_{10} (0,1) = -1$

5) $\log_2 (16) = x \Leftrightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4$

Por lo tanto, $\log_2 (16) = 4$

3. Logaritmo de base 10

Si en un logaritmo no aparece indicada la base, entonces la base es 10.

$$\log(b) = n \Leftrightarrow \log_{10}(b) = n$$

Ejemplos:

1) $\log(100) = x \Leftrightarrow \log_{10}(100) = x \Leftrightarrow 10^x = 100 \Rightarrow x = 2$

   Por lo tanto, $\log(100) = 2$

2) $\log(0{,}001) = x \Leftrightarrow \log_{10}(0{,}001) = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}001 \Rightarrow x = -3$

   Por lo tanto, $\log(0{,}001) = -3$

4. Propiedades de logaritmos

4.1. Logaritmo de la base

$$\log_a (a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = a$$

Ejemplo:

1) $\log_8 (8) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8^1 = 8$

2) $\log (10) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 10^1 = 10$

4.2. Logaritmo de la unidad

$$\boxed{\log_a (1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = 1}$$

Ejemplo:

1) $\log_2 (1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^0 = 1$

2) $\log (1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10^0 = 1$

4. Propiedades de logaritmos

4.3. Logaritmo de la multiplicación

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a (b) + \log_a (c)}$$

Ejemplo:

1) $\log (200) = \log (2 \cdot 100) = \log (2) + \log (100) = \log (2) + 2$

2) $\log_8 (2) + \log_8 (4) = \log_8 (2 \cdot 4) = \log_8 (8) = 1$

$$\log_a (b \cdot c) \neq \log_a (b) \cdot \log_a (c)$$

$$\log_a (b + c) \neq \log_a (b) + \log_a (c)$$

4. Propiedades de logaritmos

4.4. Logaritmo de la división

$$\boxed{\log_a (b : c) = \log_a (b) - \log_a (c)}$$

Ejemplo:

1) $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 (1) - \log_2 (8) = 0 - 3 = -3$

2) $\log_3 (21) - \log_3 (7) = \log_3 (21 : 7) = \log_3 (3) = 1$

$\log_a (b : c) \neq \log_a (b) : \log_a (c)$

$\log_a (b - c) \neq \log_a (b) - \log_a (c)$

4. Propiedades de logaritmos

4.5. Logaritmo de la potencia

$$\log_a (b)^n = n \cdot \log_a (b)$$

Ejemplo:

1) $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 (8^{-1}) = -1 \cdot \log_2 (8) = -1 \cdot 3 = -3$

2) Si $\log_2 (3) = m$, entonces $\log_2 (81)$:

$\log_2 (81) = \log_2 (3^4) = 4 \cdot \log_2 (3) = 4m$

4. Propiedades de logaritmos

4.6. Logaritmo de la raíz

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a (b)$$

Ejemplo:

(1) $\log_7 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} \cdot \log_7 (2)$

Apliquemos nuestros conocimientos

1. $\log_2 32 + \log_3 27 - \log_4 16 =$

A) 21
B) 10
C) 7
D) 6
E) 3

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

$\log_2 32 + \log_3 27 - \log_4 16 =$

Resolviendo cada logaritmo por separado, mediante la igualdad asociada a la potencia correspondiente, tenemos:

$\log_2 32 = x \iff 2^x = 32 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \log_2 32 = 5$

$\log_3 27 = x \iff 3^x = 27 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \log_3 27 = 3$

$\log_4 16 = x \iff 4^x = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \log_4 16 = 2$

Luego, reemplazando:

$\log_2 32 + \log_3 27 - \log_4 16 = 5 + 3 - 2 = 6$

D

Habilidad: Aplicación

Apliquemos nuestros conocimientos

2. $\log 5.000 - \log 2,5 =$

A) $2 \cdot \log 5 + \log 2$

B) $4 - 3 \cdot \log 5$

C) $4 + \log 5$

D) $3 \cdot \log 2$

E) $3 + \log 2$

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

log 5.000 – log 2,5 =	(aplicando logaritmo de la división)
log (5.000 : 2,5) =	(resolviendo)
log 2.000 =	(escribiendo como multiplicación)
log (2 · 1.000) =	(aplicando logaritmo del producto)
log 2 + log 1.000 =	(resolviendo)
log 2 + 3	

E

Habilidad: Aplicación

Apliquemos nuestros conocimientos

3. $\log(10x^4 \cdot y^{-3}) =$

A) $1 - 7\cdot \log(xy)$

B) $1 + 4\cdot\log x - 3\cdot\log y$

C) $-\dfrac{4}{3} \cdot (\log 10x + \log y)$

D) $\dfrac{4\cdot\log 10x}{-3\cdot\log y}$

E) $(4\cdot\log x)\cdot(-3\cdot\log y)$

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

$\log(10x^4 \cdot y^{-3}) =$ (aplicando logaritmo del producto)

$\log 10 + \log x^4 + \log y^{-3} =$ (aplicando logaritmo de potencia)

$\log 10 + 4\cdot\log x - 3\cdot\log y =$ (resolviendo)

$1 + 4\cdot\log x - 3\cdot\log y$

B

Habilidad: **Aplicación**

Apliquemos nuestros conocimientos

4. Si $5 \cdot \log_2 x^3 = n$, con ***x*** un número positivo, ¿cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** al valor de ***x***?

A) $\sqrt[n]{2}$

B) $2^{\frac{n}{15}}$

C) $2^{\frac{n}{5}}$

D) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

E) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

$5 \cdot \log_2 x^3 = n$ (aplicando logaritmo de la potencia)

$3 \cdot 5 \cdot \log_2 x = n$ (multiplicando)

$15 \cdot \log_2 x = n$ (despejando el logaritmo)

$\log_2 x = \frac{n}{15}$ (escribiendo como potencia)

$2^{\frac{n}{15}} = x$

B

Habilidad: Aplicación

Apliquemos nuestros conocimientos

5. Dada la siguiente igualdad $\log_3 \sqrt[n]{9} = m$, con **n** un número natural, el valor de **n** en función de **m** es:

A) $\dfrac{2}{m}$

B) 2m

C) m^2

D) $\sqrt{m}$

E) 3^m

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

$\log_3 \sqrt[n]{9} = m$ (aplicando logaritmo de raíz)

$\frac{1}{n} \cdot \log_3 9 = m$ (como $\log_3 9 = 2$, reemplazamos)

$\frac{1}{n} \cdot 2 = m$ (multiplicando por n)

$2 = m \cdot n$ (despejando n)

$\frac{2}{m} = n$

A

Habilidad: Aplicación