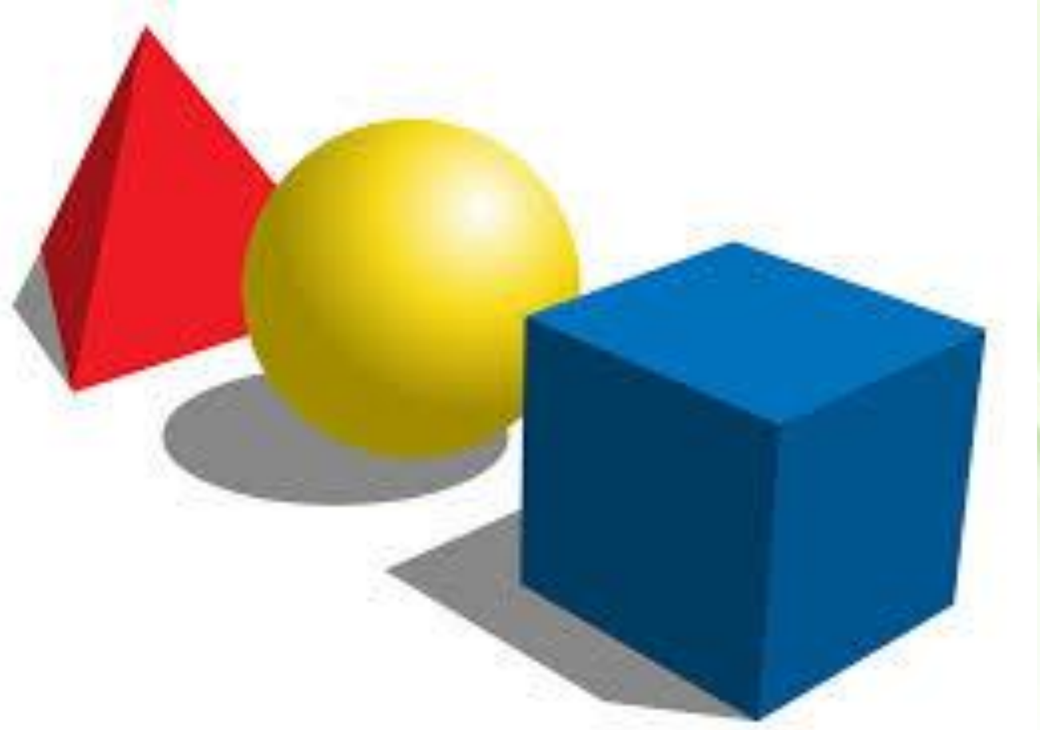
Área y volumen de sólidos



Contenidos

Área y volumen de sólidos

- Poliedros
- Cuerpos redondos

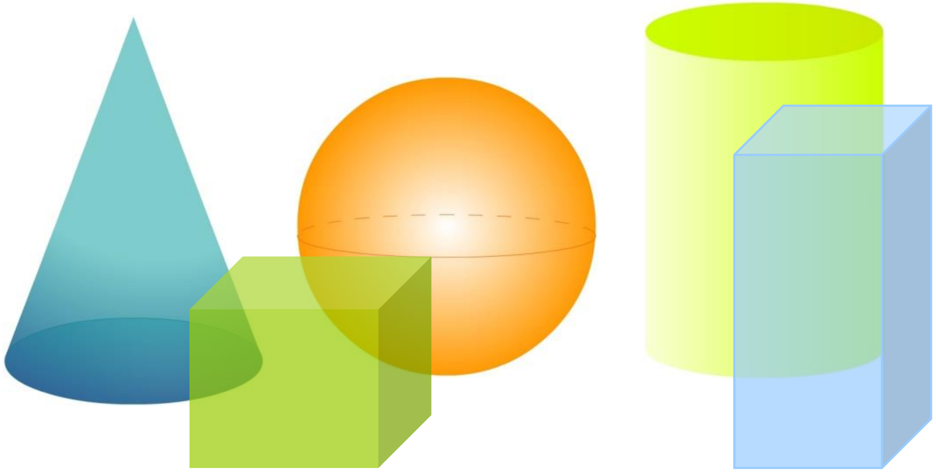
Cuerpos geométricos

Un cuerpo geométrico o sólido es todo lo que ocupa lugar en el espacio.

Los cuerpos geométricos pueden ser de dos clases:

- **Poliedros:** Formados por caras planas.
- **Cuerpos redondos:** Teniendo alguna o todas sus caras curvas.

Ejemplos



Cuerpos geométricos

Cada cuerpo geométrico o sólido tiene volumen y área.

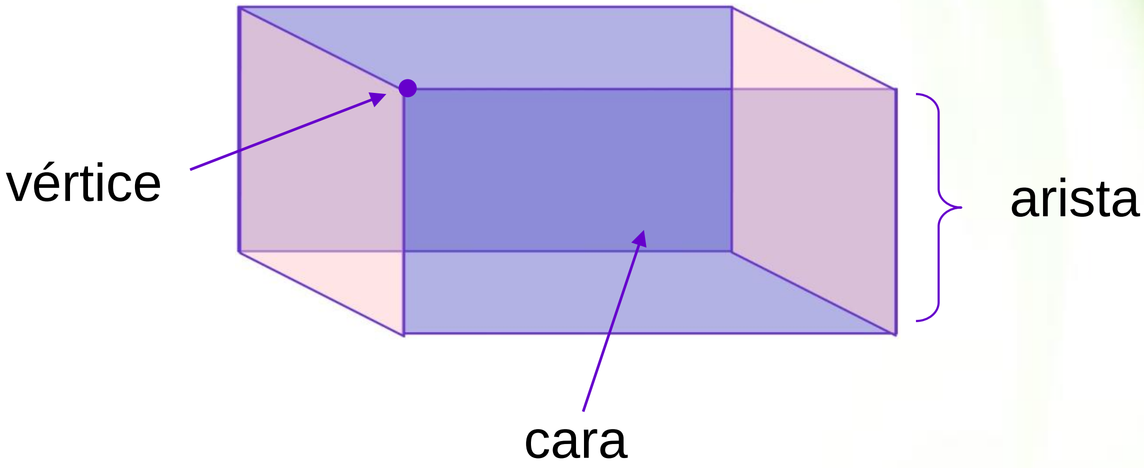
Volumen: lugar que ocupa en el espacio (capacidad).

Área total: suma de todas las superficies que forman el cuerpo geométrico.

Poliedros

Cuerpo tridimensional delimitado por **caras** poligonales planas.

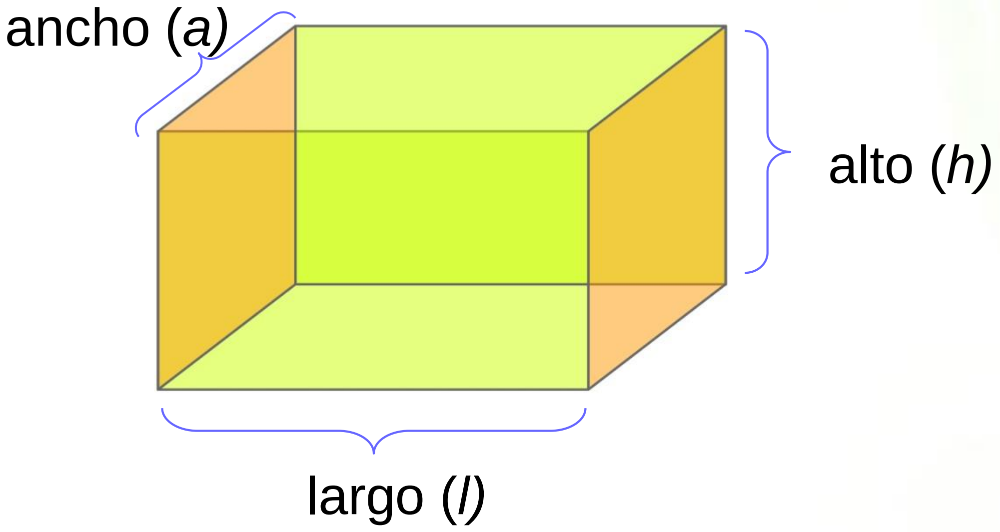
Al punto en el que coinciden tres o más caras se le llama **vértice**, y a la línea en la que coinciden dos caras se le llama **arista**.



Paralelepípedo

Poliedro formado por 6 caras que son paralelógramos, que pueden ser rectángulos o cuadrados.

Estas caras son paralelas e iguales, dos a dos.



Paralelepípedo

Área de un paralelepípedo

$$\boxed{\text{Área} = 2(\text{largo} \cdot \text{ancho} + \text{largo} \cdot \text{alto} + \text{ancho} \cdot \text{alto})}$$

Volumen de un paralelepípedo

$$\boxed{\text{Volumen} = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}}$$

Paralelepípedo

Ejemplo

Calcular el área y el volumen de una caja de zapatos de 20 cm de ancho, 30 cm de largo, y 10 cm de alto.

Para el área se tiene:

Área = 2(largo · ancho + largo · alto + ancho · alto)

Área = 2(30 · 20 + 30 · 10 + 20 · 10)

Área = 2(600 + 300 + 200)

Área = 2 · (1.100)

Área = 2.200 cm^2

Para el volumen se tiene:

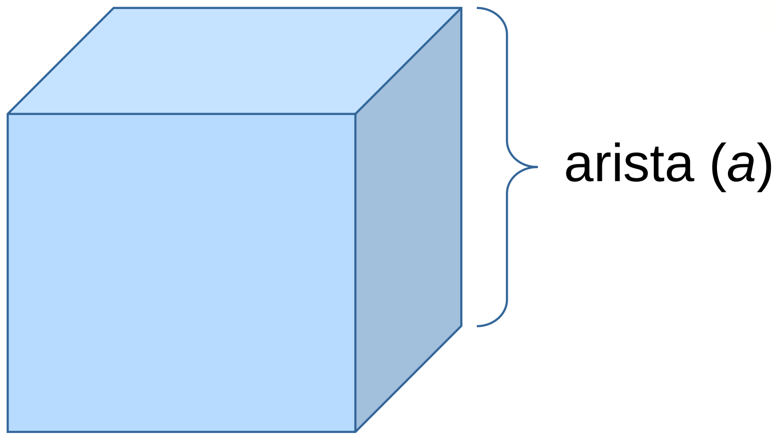
Volumen = largo · ancho · alto

Volumen = 30 · 20 · 10

Volumen = 6.000 cm^3

Cubo

Poliedro formado por 6 caras cuadradas congruentes.



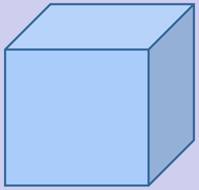
El cubo tiene:

- 6 caras
- 8 vértices
- 12 aristas

Cubo

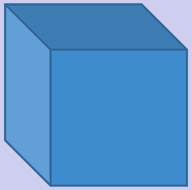
Área de un cubo

$\boxed{\text{Área} = 6 \cdot (\text{arista})^2}$



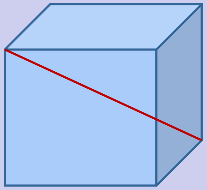
Volumen de un cubo

$\boxed{\text{Volumen} = (\text{arista})^3}$



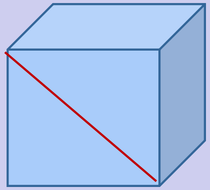
Diagonal de un cubo

$\boxed{\text{Diagonal cubo} = \text{arista} \cdot \sqrt{3}}$



Diagonal de la cara del cubo

$\boxed{\text{Diagonal cara} = \text{arista} \cdot \sqrt{2}}$



Cubo

Ejemplo

Calcular el área, el volumen y la diagonal de un cubo de $5\sqrt{2}$ cm de arista.

Para el área se tiene:

Área = 6 $(\text{arista})^2$	(Reemplazando)
Área = 6 $(5\sqrt{2})^2$	(Elevando al cuadrado)
Área = 6 $(25 \cdot 2)$	(Multiplicando)
Área = $6 \cdot 50$	
Área = 300 cm^2	

Cubo

Ejemplo

Calcular el área, el volumen y la diagonal de un cubo de $5\sqrt{2}$ cm de arista.

Para el volumen se tiene:

$\text{Volumen} = (\text{arista})^3$	(Reemplazando)
$\text{Volumen} = (5\sqrt{2})^3$	(Elevando al cubo)
$\text{Volumen} = 5^3 \cdot \sqrt{2^3}$	(Calculando)
$\text{Volumen} = 125\sqrt{8}\ \text{cm}^3$	(Descomponiendo la raíz)
$\text{Volumen} = 125 \cdot 2\sqrt{2}\ \text{cm}^3$	
$\text{Volumen} = 250\sqrt{2}\ \text{cm}^3$	

Cubo

Ejemplo

Calcular el área, el volumen y la diagonal de un cubo de $5\sqrt{2}$ cm de arista.

Para la diagonal del cubo se tiene:

$$\text{Diagonal} = \text{arista} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Diagonal} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

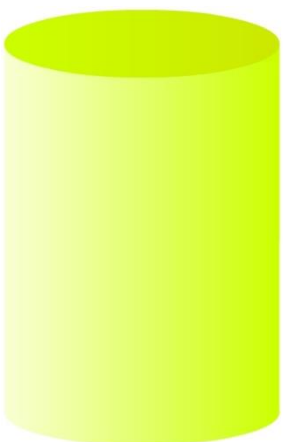
$$\text{Diagonal} = 5 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}$$

Cuerpos redondos

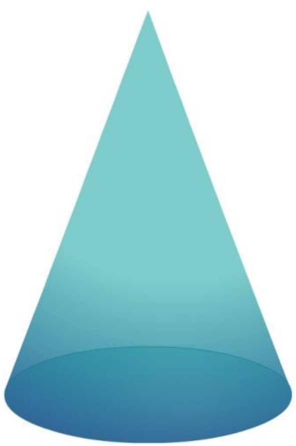
Son aquellos cuerpos o sólidos geométricos formados por regiones curvas, o regiones planas y curvas.

Se generan por la rotación de 360º de una figura plana alrededor de su eje.

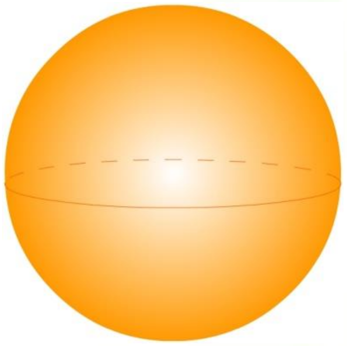
Los cuerpos redondos que estudiaremos son:



Cilindro



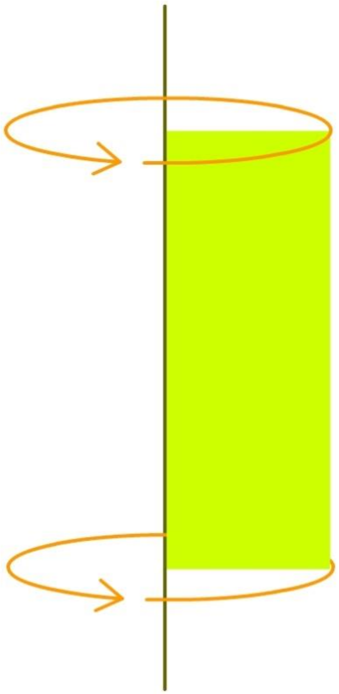
Cono

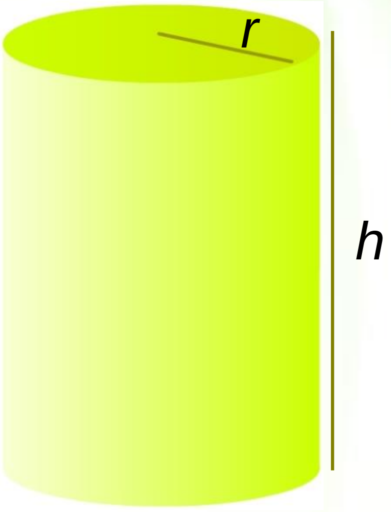


Esfera

Cilindro

Es el cuerpo que se produce a partir de la rotación indefinida de un rectángulo en torno a uno de sus lados. El lado en torno al cual gira el rectángulo pasa a ser la altura del cilindro.





Cilindro

Área de un cilindro

$$\text{Área} = 2 \cdot \pi \cdot \text{radio} \cdot \text{altura} + 2 \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2$$

Volumen de un cilindro

$$\text{Volumen} = \pi \cdot (\text{radio})^2 \cdot \text{altura}$$

Cilindro

Ejemplo

Calcular el área y el volumen de un cilindro de 10 cm de diámetro basal y 15 cm de altura.

Si el diámetro mide 10 cm, entonces el radio mide 5 cm.

Para el área se tiene:

$$\text{Área} = 2 \cdot \pi \cdot \text{radio} \cdot \text{altura} + 2 \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot (5)^2$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \pi \cdot 75 + 2 \cdot \pi \cdot 25$$

$$\text{Área} = 150\pi + 50\pi$$

$$\text{Área} = 200\pi \text{ cm}^2$$

Cilindro

Ejemplo

Calcular el área y el volumen de un cilindro de 10 cm de diámetro basal y 15 cm de altura.

Para el volumen se tiene:

$$\text{Volumen} = \pi \cdot (\text{radio})^2 \cdot \text{altura}$$

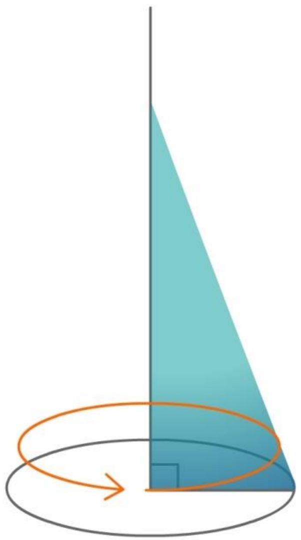
$$\text{Volumen} = \pi \cdot (5)^2 \cdot 15$$

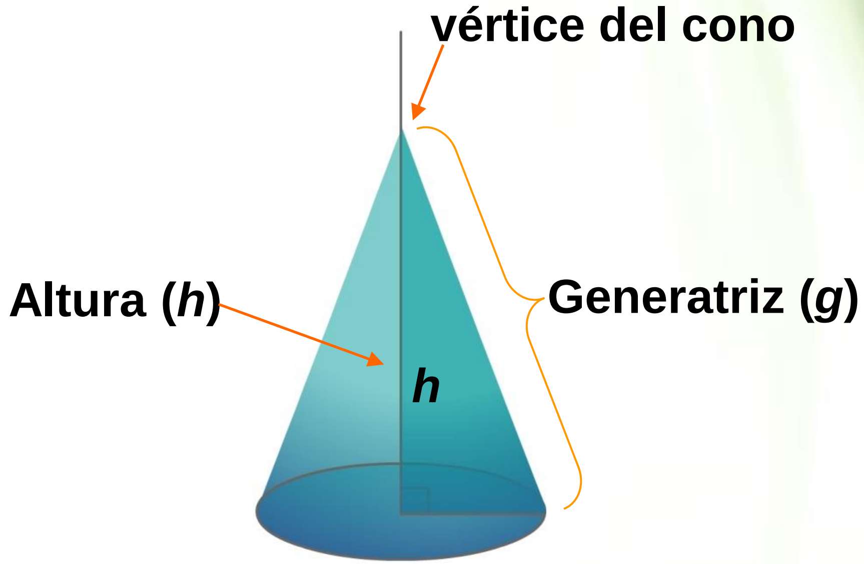
$$\text{Volumen} = \pi \cdot 25 \cdot 15$$

$$\text{Volumen} = 375\pi \text{ cm}^3$$

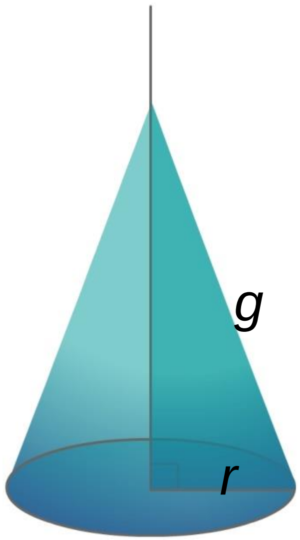
Cono

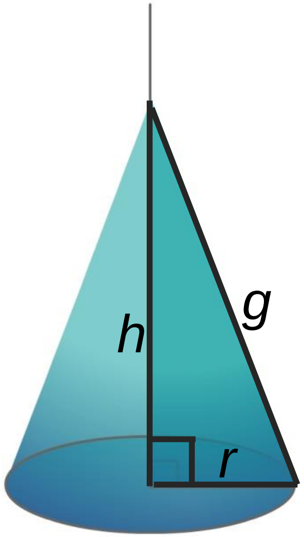
Es el cuerpo que se produce a partir de la rotación indefinida de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos. El cateto en torno al cual gira el triángulo, pasa a ser la altura del cono.





Cono





Área de un cono

$$\boxed{\text{Área total} = \pi \cdot \text{radio} \cdot \text{generatriz} + \pi \cdot (\text{radio})^2}$$

Para calcular la generatriz (*g*) se utiliza el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es (*g)* y cuyos catetos son *h* y *r*.

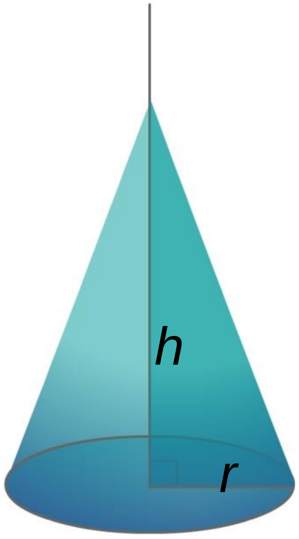
Recuerda

$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

Cono

Volumen de un cono

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2 \cdot \text{altura}}$$



Cono

Ejemplo

Calcular el área y el volumen de un cono de 4 cm de radio y 3 cm de altura.

Comenzaremos por el volumen:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2 \cdot \text{altura}$$ (Reemplazando)

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4)^2 \cdot 3$$ (Calculando)

$$\text{Volumen} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \pi \cdot 16 \cdot \cancel{3}$$ (Simplificando)

$$\text{Volumen} = 16\pi \text{ cm}^3$$

Cono

Ejemplo

Calcular el área y el volumen de un cono de 4 cm de radio y 3 cm de altura.

Para calcular el área del cono es necesario encontrar la medida de la generatriz.

$g^2 = h^2 + r^2$

$g^2 = 3^2 + 4^2$

$g^2 = 9 + 16$

$g^2 = 25$

$\Rightarrow g = \sqrt{25}$

$\Rightarrow g = 5$

Área total = $\pi \cdot$ radio $\cdot$ generatriz $+ \pi \cdot (\text{radio})^2$

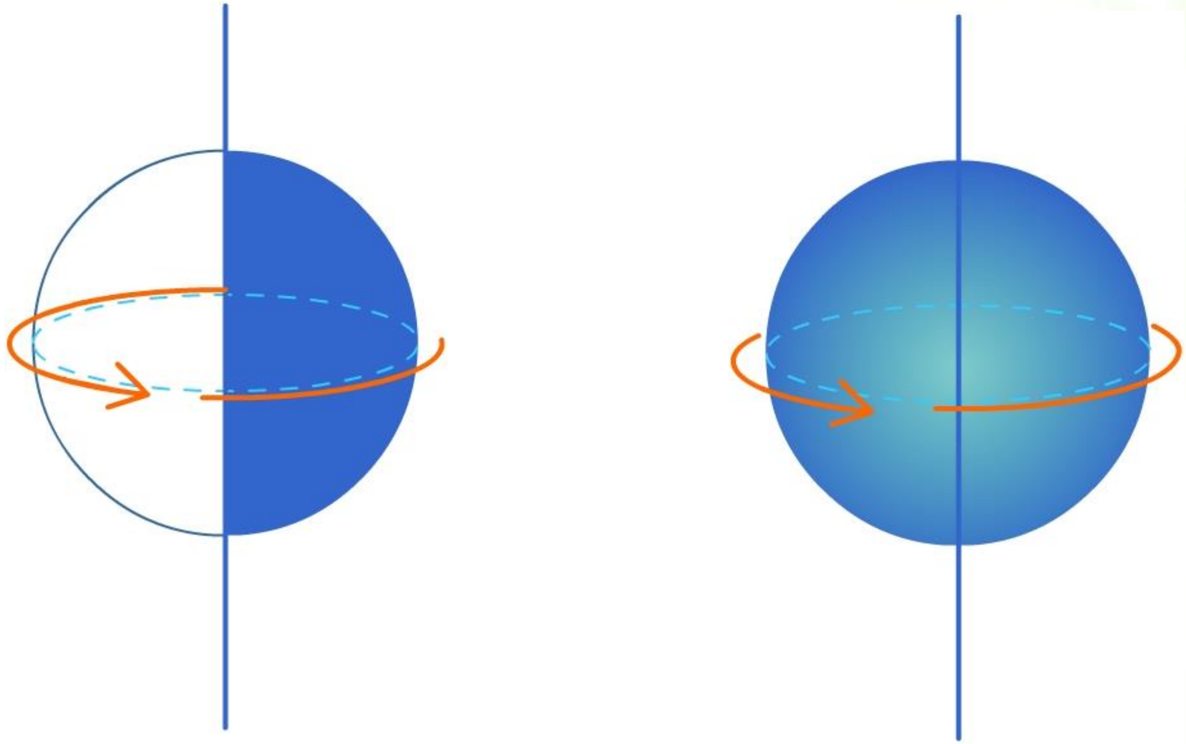
Área total = $\pi \cdot 4 \cdot 5 + \pi \cdot (4)^2$

Área total = $20\pi + 16\pi$

Área total = 36π cm^2

Esfera

Es el cuerpo que se produce a partir de la rotación indefinida de un semicírculo en torno a su diámetro.



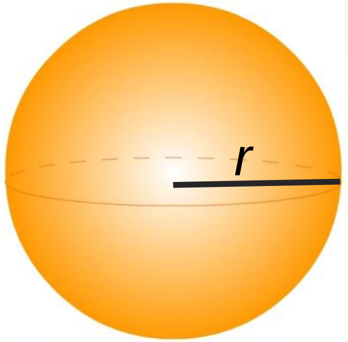
Esfera

Área de una esfera

$$\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2$$

Volumen de una esfera

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\text{radio})^3$$



Esfera

Ejemplo

Calcular el área y el volumen de una esfera de 12 cm de radio.

El área es:

$$\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2$$

$$\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot (12)^2$$

$$\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot 144$$

$$\text{Área} = 576\pi \text{ cm}^2$$

El volumen es:

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\text{radio})^3$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (12)^3$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \pi \cdot \overset{576}{\cancel{1.728}}$$

$$\text{Volumen} = 4 \cdot \pi \cdot 576$$

$$\text{Volumen} = 2.304\pi \text{ cm}^3$$

Apliquemos nuestros conocimientos

1. El volumen de un paralelepípedo mide 96 cm^3. Si el ancho y el largo miden 6 y 8 cm, respectivamente, entonces ¿cuánto mide el área de dicho cuerpo?

A) 2 cm^2
B) 48 cm^2
C) 76 cm^2
D) 96 cm^2
E) 152 cm^2

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

El volumen de un paralelepípedo es:

Volumen = largo · ancho · alto (Reemplazando)

$$96 = 8 \cdot 6 \cdot \text{alto}$$ (Multiplicando)

$$96 = 48 \cdot \text{alto}$$ (Dividiendo por 48)

$$\frac{96}{48} = \text{alto}$$ (Dividiendo)

$$2 = \text{alto}$$

Luego, el alto mide 2 cm, entonces conocidas las tres dimensiones del cuerpo, calcularemos el área:

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

El área es:

Área = 2(largo · ancho + largo · alto + ancho · alto)

(Reemplazando las dimensiones del paralelepípedo)

Área = 2(8 · 6 + 8 · 2 + 6 · 2) (Multiplicando)

Área = 2(48 + 16 + 12) (Sumando)

Área = 2 · 76 (Multiplicando)

Área = 152 cm^2

E

Habilidad: Aplicación

Apliquemos nuestros conocimientos

2. El área de una esfera mide 324π cm^2. ¿Cuál es el volumen de dicha esfera?

A) 81π cm^3
B) 324π cm^3
C) $243\ \pi$ cm^3
D) 972π cm^3
E) 1.296π cm^3

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

Conocida el área de la esfera podemos calcular el radio de la esfera:

$\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2$ (Reemplazando)

$324\pi = 4 \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2$ (Dividiendo por 4π)

$\dfrac{324\pi}{4\pi} = (\text{radio})^2$ (Simplificando)

$81 = (\text{radio})^2$ (Aplicando raíz cuadrada)

$\Rightarrow \text{radio} = \sqrt{81}$

$\Rightarrow \text{radio} = 9\ \text{cm}$

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

Calculando el volumen de la esfera:

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\text{radio})^3$$ (Reemplazando)

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3$$ (Elevando al cubo)

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 729$$ (Simplificando por 3)

$$\text{Volumen} = 4 \cdot \pi \cdot 243$$ (Multiplicando)

$$\text{Volumen} = 972\pi \ \text{cm}^3$$

D

Habilidad: Aplicación

Apliquemos nuestros conocimientos

3. Un cono está inscrito en un cilindro de radio basal 6 cm y altura 8 cm. ¿Cuánto mide el área del cono?

A) 480π cm^2
B) 96π cm^2
C) 60π cm^2
D) 72π cm^2
E) 48π cm^2

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

Dado que el cono está inscrito en el cilindro, entonces tienen el mismo radio basal, y también la misma altura.

Para calcular el área de un cono es necesario conocer la medida de la generatriz.

Como se forma un triángulo rectángulo de hipotenusa (*g*) y catetos *r* y *h*, por trío pitagórico 6 – 8 – 10 se tiene que la generatriz mide 10 cm.

Luego:

Área total = $\pi \cdot$ radio $\cdot$ generatriz + $\pi \cdot (\text{radio})^2$

Área total = $\pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot (6)^2$ (Calculando)

Área total = $60\pi + 36\pi$

Área total = 96π cm^2

B

Habilidad: Aplicación

Apliquemos nuestros conocimientos

4. Si la diagonal de un cubo mide 9 cm, entonces ¿cuánto mide el área de dicho cubo?

A) 162 cm^2

B) 81 cm^2

C) $162\sqrt{3}$ cm^2

D) $81\sqrt{3}$ cm^2

E) $\frac{9}{\sqrt{3}}$ cm^2

¿Cuál es la alternativa correcta?

Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

Se sabe que la diagonal de un cubo se calcula como:

$$\text{Diagonal} = \text{arista} \cdot \sqrt{3}$$ (Reemplazando)

$$9 = \text{arista} \cdot \sqrt{3}$$ (Dividiendo por raíz de 3)

$$\frac{9}{\sqrt{3}} = \text{arista}$$

A

El área de un cubo se calcula como:

$$\text{Área} = 6 \cdot (\text{arista})^2$$ (Reemplazando)

Habilidad: Aplicación

$$\text{Área} = 6 \cdot \left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)^2$$ (Elevando al cuadrado)

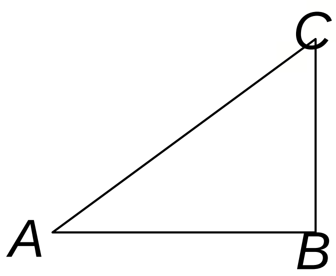
$$\text{Área} = 6 \cdot \frac{81}{3}$$ (Simplificando y multiplicando)

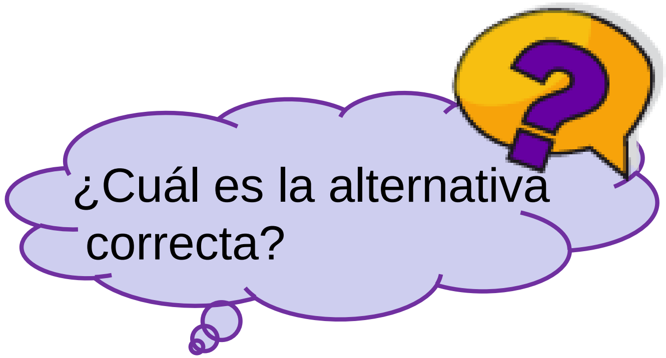
$$\text{Área} = 162 \text{ cm}^2$$

Apliquemos nuestros conocimientos

5. En la figura, el triángulo *ABC* es rectángulo en *B*, *AB* = 5 cm y *AC* = 13 cm. ¿Cuál es el volumen del cuerpo generado al rotar el triángulo en torno al lado *AB*?

A) 30π cm^3
B) 60π cm^3
C) 120π cm^3
D) 240π cm^3
E) 624π cm^3



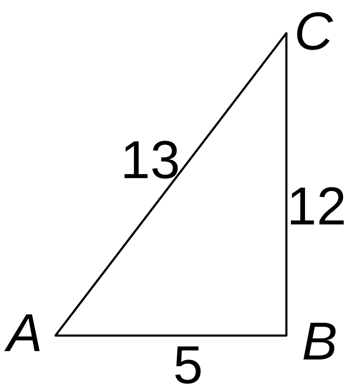


Apliquemos nuestros conocimientos

Resolución:

Al girar el triángulo en torno a $\overline{AB}$ se genera un cono de radio $\overline{BC}$ y de altura $\overline{AB}$.

Por trío pitagórico 5 – 12 – 13, se tiene que *BC* = 12 cm.



El volumen del cono es:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\text{radio})^2 \cdot \text{altura}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (BC)^2 \cdot AB$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (12)^2 \cdot 5$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 144 \cdot 5$$

$$\text{Volumen} = \pi \cdot 48 \cdot 5$$

$$\text{Volumen} = 240\pi \text{ cm}^3$$

D

Habilidad: **Aplicación**